ANALISI MATEMATICA I - A.A. 2011/2012

EQUAZIONI DIFFERENZIALI / ESERCIZI SVOLTI

L'asterisco contrassegna gli esercizi più difficili.

ESERCIZIO. *Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y' = e^{x-y}$$

e risolvere il relativo problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = 0$. *L'equazione ammette soluzioni limitate?*

Svolgimento. Poiché $e^{x-y} = e^x e^{-y}$, si tratta di un'equazione a variabili separabili:

$$y' = g(x)\, h(y) \quad \text{con} \quad g(x) = e^x \quad \text{e} \quad h(y) = e^{-y} = \frac{1}{e^y}.$$

Poiché $h(y) = 0$ significa $\frac{1}{e^y} = 0$, che è impossibile, l'equazione non ha integrali singolari. Le soluzioni non costanti si determinano separando formalmente le variabili ed integrando:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \frac{1}{e^y} \quad \to \quad e^y dy = e^x dx \quad \to \quad \int e^y dy = \int e^x dx \quad \to \quad e^y = e^x + c$$

con c costante reale arbitraria. Prendendo il logaritmo di ambo i membri per esplicitare la y, si ottiene $\log e^y = \log(e^x + c)$, ossia $y = \log(e^x + c)$ con c costante reale arbitraria. Dunque l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$\boxed{y(x) = \log(e^x + c), \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria}} \tag{1}$$

e ciascuna soluzione è definita su un opportuno intervallo I dipendente da c: quello degli x tali che $e^x + c > 0$ (si trova $I = \mathbb{R}$ se $c \geq 0$ e $I = (\log(-c), +\infty)$ se $c < 0$).
Poiché $y(0) = \log\left(e^0 + c\right) = \log(1 + c)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, la generica soluzione (1) soddisfa il problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = 0$ se e solo se $\log(1 + c) = 0$, che significa $1 + c = 1$, ossia $c = 0$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy è la funzione $y(x) = \log e^x$, cioè $y(x) = x$, con $x \in \mathbb{R}$.
Poiché $\lim_{x\to+\infty} (e^x + c) = +\infty$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, la generica soluzione (1) soddisfa

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x + c) = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$$

ed è pertanto illimitata superiormente. Dunque l'equazione non ammette soluzioni limitate.

ESERCIZIO. *Data l'equazione differenziale*

$$y' = (y - 1)\cos x\,,$$

risolvere il problema di Cauchy associato con condizione iniziale $y(0) = -1$. *Determinare poi, se esistono, le soluzioni* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *dell'equazione tali che* $\lim_{x\to+\infty} y_1(x) = 1$ *e* $\lim_{x\to+\infty} y_2(x) = 2$. *L'equazione ammette soluzioni non limitate?*

Svolgimento. Si tratta di un'equazione a variabili separabili[1]: $y' = g(x)\, h(y)$ con $g(x) = \cos x$ e $h(y) = y - 1$. Poiché $h(y) = 0$ significa $y = 1$, l'equazione ammette un'unico integrale singolare $y(x) \equiv 1$, definito su tutto $\mathbb{R}$ ($= \operatorname{dom} g$). Le soluzioni non costanti si determinano separando formalmente le variabili ed integrando:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (y-1)\cos x \quad \to \quad \frac{1}{y-1} dy = \cos x\, dx \quad \to \quad \int \frac{1}{y-1} dy = \int \cos x\, dx \\ &\to \quad \log|y - 1| = \sin x + c \end{aligned}$$

[1] che, alternativamente, può anche essere studiata come equazione lineare: $y' - y\cos x = -\cos x$

con c costante reale arbitraria. Prendendo l'esponenziale di ambo i membri si ottiene $e^{\log|y-1|} = e^{\sin x + c}$, ossia $|y-1| = e^c e^{\sin x}$, il che significa

$$|y-1| = ce^{\sin x}, \quad \text{ossia } y-1 = \pm ce^{\sin x}, \quad \text{con } c \text{ costante reale } \textit{positiva} \text{ arbitraria.}$$

Ciò equivale a

$$y-1 = ce^{\sin x} \quad \text{con } c \text{ costante reale } \textit{non nulla} \text{ arbitraria}$$

e quindi, poiché per $c = 0$ l'ultima espressione restituisce la funzione constante $y(x) \equiv 1$, l'integrale generale dell'equazione (comprendente soluzioni costanti e non) risulta

$$\boxed{y(x) = 1 + ce^{\sin x} \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } c \text{ costante reale arbitraria.}} \tag{2}$$

Essendo $y(0) = 1 + ce^{\sin 0} = 1 + ce^0 = 1 + c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, la generica soluzione (2) soddisfa il problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = -1$ se e solo se $1 + c = -1$, cioè $c = -2$.
Poiché $\lim_{x\to+\infty} e^{\sin x}$ non esiste, la generica soluzione (2) è tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + ce^{\sin x}\right) \quad \begin{cases} = 1 & \text{se } c = 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } c \neq 0. \end{cases}$$

Dunque non esistono soluzioni $y_2(x)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} y_2(x) = 2$, mentre la condizione $\lim_{x\to+\infty} y_1(x) = 1$ è soddisfatta dalla soluzione costante $y_1(x) \equiv 1$.
Circa la limitatezza delle soluzioni, risulta

$$e^{\sin x} \leq e \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

(in quanto l'esponenziale è crescente e $\sin x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) e pertanto la generica soluzione (2) soddisfa

$$|y(x)| = \left|1 + ce^{\sin x}\right| \leq 1 + \left|ce^{\sin x}\right| = 1 + |c|\, e^{\sin x} \leq 1 + |c|\, e \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dunque tutte le soluzioni dell'equazione sono limitate su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 2x\cos^2 y \\ y(0) = \pi/4 \end{cases}.$$

Svolgimento. Risolviamo innanzitutto l'equazione differenziale $y' = 2x\cos^2 y$, per poi selezionare la soluzione che risolve anche il problema di Cauchy. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:

$$y' = g(x)\, h(y) \quad \text{con} \quad g(x) = 2x \quad \text{e} \quad h(y) = \cos^2 y.$$

Poiché $h(y) = 0$ significa $\cos^2 y = 0$, cioè $\cos y = 0$, l'equazione ha le infinite soluzioni costanti $y(x) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, definite su tutto $\mathbb{R}$ ($= \operatorname{dom} g$). Nessuna di queste soluzioni risolve il problema il Cauchy (in quanto non esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{4}$) e quindi la soluzione del problema va cercata tra quelle non costanti. Le soluzioni non costanti si determinano separando formalmente le variabili ed integrando:

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y \quad \to \quad \frac{1}{\cos^2 y}dy = 2x\,dx \quad \to \quad \int \frac{1}{\cos^2 y}dy = \int 2x\,dx \quad \to \quad \tan y = x^2 + c$$

con c costante reale arbitraria. Ciò significa che le soluzioni $y(x)$ non costanti dell'equazione, ciasuna definita su un opportuno intervallo I, sono tutte e sole le funzioni derivabili in I e tali che $\tan(y(x)) = x^2 + c$ per ogni $x \in I$ ([2]). A noi interessa l'unica soluzione tale che $y(0) = \frac{\pi}{4}$, la quale deve allora soddisfare

$$\begin{cases} \tan(y(0)) = c \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases},$$

da cui segue che deve essere $c = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. D'altra parte, poiché ciascuna soluzione dell'equazione assume valori in uno ed uno solo degli intervalli in cui il coseno non si annulla (cioè gli intervalli del tipo $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$) e poiché sappiamo che la nostra soluzione assume il valore $\frac{\pi}{4}$, essa assumerà valori tutti contenuti nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (cioè nell'intervallo del tipo $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ che contiene

[2] Volendo esplicitare l'integrale generale rispetto a y e tenendo conto della periodicità della tangente, si ottiene $y(x) = \arctan\left(x^2 + c\right) + k\pi$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, che, al variare di $k \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{R}$, fornisce le infinite soluzioni non costanti dell'equazione.

$\frac{\pi}{4}$), su cui la tangente si inverte nell'arcotangente. Questo consente di esplicitare $\tan(y(x)) = x^2 + 1$ tramite la funzione arcotangente e dunque, in definitiva, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \arctan\left(x^2 + 1\right) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y' + (\sin x)\, y = \sin x$$

e, se esistono, determinarne: (i) le soluzioni costanti; (ii) le soluzioni non limitate.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti continui sull'intervallo $I = \mathbb{R}$. Usiamo la formula risolutiva

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} g(x)\, dx \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

dove $g(x) = \sin x$ e $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x) = \sin x$ su $\mathbb{R}$. Si ha

$$\int a(x)\, dx = \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

e quindi possiamo scegliere $A(x) = -\cos x$. Allora, effettuando la sostituzione $t = -\cos x$, $dt = \sin x\, dx$, si ha

$$\int e^{A(x)} g(x)\, dx = \int e^{-\cos x} \sin x\, dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{-\cos x} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria,}$$

da cui si ottiene

$$y(x) = e^{\cos x} \int e^{-\cos x} \sin x\, dx = e^{\cos x}\left(e^{-\cos x} + c\right) = 1 + ce^{\cos x} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

L'integrale generale è dunque

(3) $$\boxed{y(x) = 1 + ce^{\cos x} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria.}$$

La generica soluzione (3) è costante se e solo se $y'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè $-c(\sin x)\, e^{\cos x} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il che significa $c = 0$. Dunque l'equazione ha un'unica soluzione costante, data da [3]

(4) $$y(x) = 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Poiché l'esponenziale è monotona crescente e si ha che $\cos x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $e^{\cos x} \leq e$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e pertanto la generica soluzione (3) soddisfa

$$|y(x)| = |1 + ce^{\cos x}| \leq 1 + |c|\, |e^{\cos x}| = 1 + |c|\, e^{\cos x} \leq 1 + |c|\, e \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dunque ogni soluzione dell'equazione è limitata su $\mathbb{R}$, cioè l'equazione non ammette soluzioni non limitate.

ESERCIZIO. *Risolvere per $x > 0$ l'equazione differenziale*

$$y' + \frac{1}{x}\, y = x^2$$

e, se esistono, determinarne le soluzioni tali che: (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^2} = 1$; *(ii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\, y(x) = 1$.

Svolgimento. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti continui sugli intervalli $J = (-\infty, 0)$ ed $I = (0, +\infty)$, da risolversi sul secondo ($x > 0$). Usiamo la formula risolutiva

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} g(x)\, dx \qquad \text{per ogni } x \in I$$

dove $g(x) = x^2$ e $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x) = 1/x$ su I. Si ha

$$\int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x + c \qquad \text{per } x > 0$$

[3] Si noti che l'equazione può anche essere vista come equazione a variabili separabili: $y' = \sin x - (\sin x)\, y$, ossia $y' = g(x)\, h(y)$ con $g(x) = \sin x$ e $h(y) = 1 - y$; allora le sue soluzioni costanti si ottengono risolvendo $h(y) = 0$, che equivale a $y = 1$ e fornisce quindi l'unica soluzione costante (4).

e quindi possiamo scegliere $A(x) = \log x$. Allora, siccome $e^{\log x} = x$, si ha

$$\int e^{A(x)} g(x)\, dx = \int e^{\log x} x^2 dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria}$$

e quindi si ottiene

$$y(x) = e^{-\log x} \int e^{\log x} x^2 dx = \frac{1}{e^{\log x}} \left(\frac{x^4}{4} + c \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{x^4}{4} + c \right) = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x} \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

L'integrale generale è dunque

$$\boxed{y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x} \qquad \text{per ogni } x > 0}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria.}$$

Per ogni valore di c risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3} \right) = +\infty$$

e pertanto l'equazione non ammette soluzioni soddisfacenti la condizione (i).
Per ogni valore di c risulta

$$\lim_{x \to 0^+} x\, y(x) = \lim_{x \to 0^+} x \left(\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^4}{4} + c \right) = c$$

e pertanto la condizione (ii) è soddisfatta se e solo se $c = 1$, fornendo l'integrale particolare

$$y(x) = \frac{x^4 + 4}{4x} \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

ESERCIZIO. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y' + 2xy = x$$

e rispondere ai seguenti quesiti, motivando la risposta:

(i) *esistono soluzioni che tendono a 0 per $x \to +\infty$?*
(ii) *quale deve essere il valore iniziale y_0 affinché la soluzione che soddisfa $y(0) = y_0$ sia costante?*

Svolgimento. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti continui sull'intervallo $I = \mathbb{R}$: $y' + a(x)\, y = g(x)$ con $a(x) = 2x$ ed $g(x) = x$. Usiamo la formula risolutiva

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} g(x)\, dx \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

dove $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x) = 2x$ su $\mathbb{R}$. Si ha

$$\int a(x)\, dx = \int 2x\, dx = x^2 + c \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

e quindi possiamo scegliere $A(x) = x^2$. Allora risulta

$$\int e^{A(x)} g(x)\, dx = \int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x\, dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{e^t}{2} + c = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

(dove si è effettuata la sostituzione $t = e^{x^2}$, $dt = 2xe^{x^2} dx$) e quindi si ottiene

$$y(x) = e^{-x^2} \int e^{x^2} x\, dx = e^{-x^2} \left(\frac{e^{x^2}}{2} + c \right) = \frac{1}{2} + ce^{-x^2} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

L'integrale generale è dunque

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} + ce^{-x^2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria.}$$

(i) Per ogni costante c, risulta $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 1/2$ e quindi non esistono soluzioni che tendono a 0 per $x \to +\infty$.

(ii) L'unica soluzione costante si ha per $c = 0$ ed è $y(x) = 1/2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la quale soddisfa ovviamente $y(0) = 1/2$. Allora, per unicità della soluzione al problema di Cauchy, la condizione iniziale da imporre per ottenere tale soluzione è $y(0) = 1/2$, cioè $y(0) = y_0$ con $y_0 = 1/2$.

ESERCIZIO. *Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$\left(1 + x^2\right) y' = y \tag{5}$$

e stabilire se essa ammette soluzioni non limitate. Determinarne inoltre, se esistono, le soluzioni non costanti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} y_1(x) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} y_2(x) = 0$.

Svolgimento. Poiché $1 + x^2 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'equazione equivale a

$$y' - \frac{1}{1+x^2} y = 0$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea (cioè del tipo $y' + a(x)y = 0$, con coefficiente $a(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, definito e continuo su tutto $\mathbb{R}$). Il suo integrale generale è dato dalla formula

$$y(x) = ce^{-A(x)} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

dove $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x)$ e c è una costante reale arbitraria. Risulta

$$\int a(x)\,dx = -\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\arctan x + k \qquad (k \text{ costante reale arbitraria}),$$

quindi possiamo prendere $A(x) = -\arctan x$ ed ottenere

$$\boxed{y(x) = ce^{\arctan x} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria.} \tag{6}$$

Di conseguenza l'equazione differenziale non ammette soluzioni non limitate, in quanto per ogni $c \in \mathbb{R}$ la funzione $y(x)$ è limitata su $\mathbb{R}$, perché continua su $\mathbb{R}$ e dotata di limiti finiti all'infinito:

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = ce^{-\pi/2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = ce^{\pi/2}. \tag{7}$$

Tenendo conto dei limiti (7), la soluzione $y_1(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} y_1(x) = 1$ esiste e corrisponde al valore di c soddisfacente $ce^{\pi/2} = 1$, ossia $c = e^{-\pi/2}$ e quindi $y_1(x) = e^{-\pi/2+\arctan x}$ (non costante). Al contrario, non esiste alcuna soluzione non costante $y_2(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} y_2(x) = 0$, in quanto l'equazione $ce^{\pi/2} = 0$ equivale a $c = 0$ e fornisce quindi la soluzione costante $y(x) \equiv 0$.

Osservazione. L'equazione (5) può anche essere risolta come equazione a variabili separabili, essendo equivalente a

$$y' = \frac{1}{1+x^2} y.$$

Essa ammette un'unica soluzione costante, data $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Circa le soluzioni non costanti, dall'uguaglianza

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

si ricava

$$\begin{aligned}
\log|y| &= \arctan x + c && \text{con } c \text{ costante reale arbitraria} \\
|y| &= e^c e^{\arctan x} \\
|y| &= ce^{\arctan x} && \text{con } c > 0 \text{ costante reale arbitraria} \\
y &= \pm ce^{\arctan x} \\
y &= ce^{\arctan x} && \text{con } c \neq 0 \text{ costante reale arbitraria.}
\end{aligned}$$

Recuperando la soluzione costante come corrispondente al valore $c = 0$ per la costante arbitraria, si ritrova l'integrale generale (6).

ESERCIZIO. *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{l} y' = \dfrac{y}{t+2} + \dfrac{1}{4t} \\ y(-1) = 1 \end{array}\right. \tag{8}$$

indicando l'intervallo massimale su cui essa è definita. Scriverne inoltre lo sviluppo di Taylor-Peano di ordine 2 *centrato in* $t_0 = -1$.

Svolgimento. L'equazione è lineare del primo ordine completa: $y' + a(t)\,y = g(t)$ con $a(t) = -\frac{1}{t+2}$ e $g(t) = \frac{1}{4t}$. I coefficienti sono entrambi definiti e continui sugli intervalli $I_1 = (-\infty, -2)$, $I_2 = (-2, 0)$ e $I_3 = (0, +\infty)$, su cui saranno quindi definite le soluzioni.

Poiché $-1 \in I_2$, la soluzione del problema di Cauchy (8) (che esiste ed è unica) sarà definita su I_2.

Lo sviluppo di Taylor-Peano di tale soluzione $y(t)$ può essere ricavato prima di determinarne l'espressione esplicita, usando solo il fatto che essa verifica (8). Infatti ciò significa $y(-1) = 1$ e

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t+2} + \frac{1}{4t} \qquad \text{per ogni } t \in I_2,$$

da cui segue

$$y''(t) = \frac{d}{dt}y'(t) = \frac{d}{dt}\frac{y(t)}{t+2} + \frac{d}{dt}\frac{1}{4t} = \frac{y'(t)(t+2) - y(t)}{(t+2)^2} - \frac{1}{4t^2} \quad \text{per ogni } t \in I_2.$$

Allora, valutando in $t_0 = -1$, si ha

$$y(-1) = 1, \tag{9}$$

$$y'(-1) = y(-1) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \tag{10}$$

$$y''(-1) = y'(-1) - y(-1) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \tag{11}$$

e quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= y(-1) + y'(-1)(t+1) + \frac{y''(-1)}{2}(t+1)^2 + o((t+1)^2)_{t\to-1} \\ &= 1 + \frac{3}{4}(t+1) - \frac{1}{4}(t+1)^2 + o((t+1)^2)_{t\to-1}. \end{aligned}$$

Poiché sull'intervallo $I_2 = (-2, 0)$ si ha $\int \frac{-1}{t+2}dt = -\log(t+2) + c$, l'integrale generale dell'equazione differenziale su I_2 è

$$y(t) = e^{\log(t+2)} \int e^{-\log(t+2)} \frac{1}{4t} dt = (t+2) \int \frac{1}{t+2}\frac{1}{4t} dt = \frac{t+2}{4} \int \frac{1}{t(t+2)} dt.$$

Scomponendo in fratti semplici si ottiene

$$\frac{1}{t(t+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+2},$$

da cui, integrando in senso indefinito sull'intervallo $I_2 = (-2, 0)$, risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t(t+2)} dt &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+2} dt = \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{2}\log|t+2| + c_1 \\ &= \frac{1}{2}\log(-t) - \frac{1}{2}\log(t+2) + c_1 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{-t}{t+2}\right) + c_1 \end{aligned}$$

(con $c_1 \in \mathbb{R}$ costante arbitraria). Dunque l'integrale generale dell'equazione differenziale su I_2 è

$$y(t) = \frac{t+2}{4}\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{-t}{t+2}\right) + c_1\right) = \frac{t+2}{8}\left(\log\left(\frac{-t}{t+2}\right) + c\right)$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria ($c = 2c_1$). Essendo $y(-1) = c/8$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, la soluzione con condizione iniziale $y(-1) = 1$ si ottiene per $c = 8$ ed è pertanto data da

$$y(t) = \frac{t+2}{8}\log\left(\frac{-t}{t+2}\right) + t + 2 \qquad \text{per ogni } t \in (-2, 0). \tag{12}$$

Osservazione. Ovviamente lo sviluppo di Taylor richiesto poteva anche essere determinato a posteriori, calcolando i valori (9)-(11) tramite l'espressione (12) della soluzione.

ESERCIZIO. *Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' + y' - 2y = -2x \tag{13}$$

e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases} \tag{14}$$

Svolgimento. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

ha le soluzioni $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. L'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata è quindi

$$y_o(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \qquad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.}$$

Cerchiamo una soluzione particolare $y_p(x)$ dell'equazione completa (13). Poiché il termine noto $g(x) = -2x$ è un polinomio di primo grado e 0 non è soluzione dell'equazione caratteristica, si cercherà $y_p(x)$ della forma

$$y_p(x) = ax + b \qquad \text{(generico polinomio di primo grado).}$$

Si ha $y_p'(x) = a$ e $y_p''(x) = 0$, quindi $y_p(x)$ risolve (13) se e solo se $a - 2(ax + b) = -2x$, ossia

$$-2ax + a - 2b = -2x \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} -2a = -2 \\ a - 2b = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha la soluzione unica $a = 1, b = 1/2$ e dunque dovrà essere

$$y_p(x) = x + \frac{1}{2}.$$

L'integrale generale $y(x) = y_o(x) + y_p(x)$ della (13) è allora

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + x + \tfrac{1}{2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.} \tag{15}$$

Derivando, si ottiene $y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + 1$ e quindi, calcolando $y(x)$ e $y'(x)$ in $x = 0$, si trova

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y'(0) = -2c_1 + c_2 + 1 \quad \text{per ogni } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dunque la generica soluzione (15) soddisfa il problema di Cauchy (14) se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ -2c_1 + c_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

che significa $c_1 = 1/6, c_2 = -2/3$ e pertanto fornisce

$$y(x) = \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{2}{3} e^x + x + \frac{1}{2}$$

come soluzione del problema (14).

ESERCIZIO. *Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' + y' - 6y = 1 - 18x^2.$$

Svolgimento. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

ha le soluzioni $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_o(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}, \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.}$$

L'integrale generale dell'equazione completa è allora dato dalla somma di $y_o(x)$ con una soluzione particolare qualsiasi dell'equazione stessa. Vista la forma del termine noto, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

(generico polinomio di secondo grado, non moltiplicato per alcuna potenza di x in quanto 0 non è soluzione dell'equazione caratteristica). Poiché

$$y_p'(x) = 2ax + b \quad \text{e} \quad y_p''(x) = 2a,$$

la funzione $y_p(x)$ risolve l'equazione se e solo se

$$2a + 2ax + b - 6\left(ax^2 + bx + c\right) = 1 - 18x^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

ossia

$$-6ax^2 + (2a - 6b)\,x + 2a + b - 6c = 1 - 18x^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Per il principio di identità dei polinomi, ciò equivale a

$$\begin{cases} -6a = -18 \\ 2a - 6b = 0 \\ 2a + b - 6c = 1 \end{cases}, \quad \text{ossia } a = 3,\ b = 1 \text{ e } c = 1.$$

Dunque deve essere $y_p(x) = 3x^2 + x + 1$ e l'integrale generale dell'equazione completa risulta dato da

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + 3x^2 + x + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}, \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.}$$

ESERCIZIO. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + 4y = 1 \\ y(0) = \frac{1}{4} \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Risolviamo innanzitutto l'equazione differenziale $y'' + 4y = 1$, che è lineare del secondo ordine completa, con termine noto $g(x) = 1$ definito (e costante) su tutto l'asse reale. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4 = 0$, che ha le soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Allora l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_o(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie}).$$

Poiché il termine noto $g(x) = 1$ è costante (polinomio di grado 0) e non c'è risonanza (0 non è radice caratteristica), cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa della forma $y_p(x) = a$ con a costante reale (generico polinomio di grado 0). Poiché $y_p''(x) = 0$, imponendo il soddisfacimento dell'equazione, cioè $y_p''(x) + 4y_p(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ottiene subito $4a = 1$, cioè $a = \frac{1}{4}$. Otteniamo quindi $y_p(x) = \frac{1}{4}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque l'integrale generale $y(x) = y_o(x) + y_p(x)$ dell'equazione è

$$(16) \qquad y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie}).$$

Per risolvere il problema di Cauchy, calcoliamo $y(0)$ ed $y'(0)$. Si ha $y(0) = c_1 + \frac{1}{4}$ e

$$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

da cui segue $y'(0) = 2c_2$. Allora la generica soluzione (16) soddisfa il problema di Cauchy con condizioni iniziali $y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = 1$ se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ 2c_2 = 1 \end{cases}$$

cioè $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{1}{2}$ e pertanto il problema di Cauchy è risolto dalla funzione

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$x'' - 6x' + 9x = 4te^{3t}.$$

Svolgimento. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

equivale a $(\lambda - 3)^2 = 0$ ed ha quindi l'unica soluzione $\lambda = 3$ con molteplicità 2. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è quindi

$$x_o(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.}$$

L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene sommando a $x_o(t)$ una soluzione particolare qualsiasi $x_p(t)$ dell'equazione completa stessa. Il termine noto si presenta come $g(t) = p(t)\, e^{\mu t}$ con $p(t) = 4t$ polinomio di grado 1 e $\mu = 3$ radice caratterisitica doppia, quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$x_p(t) = (at + b)\, t^2 e^{3t} = \left(at^3 + bt^2\right) e^{3t}$$

(generico polinomio di grado 1, moltiplicato per t^m con $m = 2$ e per la stessa esponenziale del termine noto). Poiché

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= \left(3at^2 + 2bt\right) e^{3t} + 3\left(at^3 + bt^2\right) e^{3t} = \left(3at^3 + 3(a+b)t^2 + 2bt\right) e^{3t}, \\ x_p''(t) &= \left(9at^2 + 6(a+b)t + 2b\right) e^{3t} + 3\left(3at^3 + 3(a+b)t^2 + 2bt\right) e^{3t} \\ &= \left(9at^3 + 9(2a+b)t^2 + 6(a+2b)t + 2b\right) e^{3t}, \end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione, semplificando e^{3t} ed ordinando secondo le potenze di t, risulta che la funzione $x_p(t)$ risolve l'equazione se e solo se

$$6at + 2b = 4t \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R},$$

ossia $6a = 4$ e $2b = 0$, che significa $a = \frac{2}{3}$ e $b = 0$. Dunque deve essere $x_p(t) = \frac{2}{3} t^3 e^{3t}$ e l'integrale generale dell'equazione completa è pertanto dato da

$$\boxed{x(t) = \left(c_1 + c_2 t + \frac{2}{3} t^3\right) e^{3t} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.}$$

ESERCIZIO. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' + y = \sin 2x$$

e, se esistono, determinarne le soluzioni $\overline{y}$ tali che $\overline{y}(0) = 0$. L'equazione ammette soluzioni non limitate?

Svolgimento. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

ha le soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm i$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_o(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.}$$

L'integrale generale dell'equazione completa è allora dato dalla somma di $y_o(x)$ con una soluzione particolare qualsiasi dell'equazione stessa. Vista la forma del termine forzante (polinomio trigonometrico non risonante), cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_p(x) = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Poiché

$$y_p'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x \quad \text{e} \quad y_p''(x) = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x,$$

$y_p(x)$ risolve l'equazione se e solo se

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + A \cos 2x + B \sin 2x = \sin 2x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

ossia

$$3A \cos 2x + (3B + 1) \sin 2x = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Ciò equivale a

$$\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B + 1 = 0 \end{cases}, \quad \text{ossia } A = 0 \text{ e } B = -\frac{1}{3}.$$

Dunque deve essere $y_p(x) = -\frac{1}{3}\sin 2x$ e l'integrale generale dell'equazione completa risulta dato da

$$\boxed{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}, \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti reali arbitrarie.} \tag{17}$$

Poiché $y(0) = c_1 \cos 0 = c_1$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la condizione $y(0) = 0$ equivale a $c_1 = 0$ e quindi la famiglia delle soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 0$ è

$$\overline{y}(x) = c_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x \quad \text{con } c_2 \text{ costante reale arbitraria.}$$

Poiché la generica soluzione (17) dell'equazione è combinazione lineare delle funzioni limitate $\cos x$, $\sin x$ e $\sin 2x$, essa stessa è limitata e quindi l'equazione non ha soluzioni non limitate. Più precisamente, la generica soluzione (17) soddisfa

$$\begin{aligned} |y(x)| &= \left| c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x \right| \leq |c_1 \cos x| + |c_2 \sin x| + \left| -\frac{1}{3}\sin 2x \right| \\ &= |c_1| \, |\cos x| + |c_2| \, |\sin x| + \frac{1}{3} |\sin 2x| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{1}{3} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(essendo $|\cos x|, |\sin x|, |\sin 2x| \leq 1$) e pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono limitate su $\mathbb{R}$.