

ANALISI MATEMATICA I
A.A. 2015-16 – Foglio 6

ESERCIZI

1. Dire se è possibile usare de l'Hôpital per calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned}
 & i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^x + \sin x \cos x}; & ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 \sin(1/x)}{2x + x^2 \sin(1/x)}; & iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{e^x}}{x}; \\
 & iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 + 2x^{-1} + \sin(2/x)}{2 \sin(2/x) + x^{-1}(\sin(1/x) + 4)}; & v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x + \sin x)}{x^2 + \cos 2x}; & vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{\sin^2(x)}.
 \end{aligned}$$

2. È vantaggioso usare i teoremi di de l'Hôpital per calcolare i seguenti limiti?

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}}{3x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}}; \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}; \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$

3. Per quali valori di α, β si possono utilizzare i teoremi di de l'Hôpital per calcolare i seguenti limiti?

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x^\alpha}{x^3}; \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{\beta x}; \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log \sin x; \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{x}$$

4. Calcolare l'ordine di infinito o infinitesimo per $x \rightarrow 0$, rispetto all'infinitesimo o infinito campione, di:

$$\begin{aligned}
 & i) e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x; & ii) (e^x \log(1+x))^{\frac{1}{3}}; & iii) (x - \sin x)(\tan x)^2; \\
 & iv) \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x - 1}{\sin x}; & v) \frac{\sin(x) \cos(x) \log(1+x)}{e^x \cos(2x) \sqrt{1+x}}; & vi) 1 + \log(1+x) - \sin x - \cos x; \\
 & vii) \frac{1}{\sin x - \sqrt{|x|}}; & viii) 2(\cos x - 1) + \sin(x^2 - x^3); & ix) (e^x - \cos x)^2 - x^4.
 \end{aligned}$$

5. Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito per $x \rightarrow +\infty$, rispetto all'infinitesimo o infinito campione, di:

$$\begin{aligned}
 & i) x - \sin x; & ii) x(\log(x) - 1) - (x+1) \log(x+1); & iii) \frac{x}{x - \tan x}; \\
 & iv) \frac{2x^3 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}}; & v) \sqrt{x+1} + \cos x; & vi) x - x e^{-\frac{1}{x^2}}.
 \end{aligned}$$

6. Determinare gli ordini di infinitesimo o di infinito per $x \rightarrow x_0$ rispetto all'infinitesimo o infinito campione di:

- i) $\sqrt{2} - \cos(x) - \sin(x)$, per $x_0 = \frac{\pi}{4}$; ii) $\sin(\pi x) - e^{2x-1}$, per $x_0 = \frac{1}{2}$;
 iii) $e^x - e^a - x + a$, per $x_0 = a$; iv) $1 - \sqrt{5 - x^3 + 2x}$, per $x_0 = 2$;
 v) $x^2 - e^{x-1} + \frac{x}{\pi} \sin \pi x$, per $x_0 = 1$; vi) $\log(2 - x^2) - \cos(\frac{\pi}{2}x)$, per $x_0 = 1$.

7. Mediante il principio di sostituzione calcolare:

- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x^2 - x}{x^3 + e^x + 1}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x}) + 2^{-x}}{3^{-4x} + 4^{-x} + \tan(\frac{1}{x})}$;
 iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\log(x)) + x^2 - 2x + 1}{x - 1}$; iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 4x) - 2 \sin x - \sin 2x + \cos x - \cos 2x}{e^{\sin x} - 1 - x}$.

8. Valutare, mediante la formula di Taylor, l'ordine di infinitesimo, al variare di $k \in \mathbb{R}$, per $x \rightarrow 0$, di:

- i) $e^x + ke^{-x}$; $\cos x - 1 - kx^2$; $\log(1 + x) - k \arctan x + \frac{x^2}{2}$;
 $(1 + x^2)^{1/x^2} - kx$; $1 - 2^x - 3^x + (k^2 + 2)^x$; $\cos(\sin x) - e^{\sin(\cos(\frac{\pi}{2}x))}$.

9. Valutare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow \infty$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ di:

- i) $e^{\frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{k}{x^2}$ ii) $\left(\sin \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{3k}$; iii) $\log(x^2 + 1) + 2 \log(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)) + \frac{k}{x^2}$

10. Calcola la formula di MacLaurin fino al terzo ordine di:

- i) $\arccos x$; ii) $\cos x + i \sin x$; iii) $e^{\sin x}$;
 iv) $\log(\sin x + \cos x)$; v) $\sqrt{1 + \log(1 + x)}$; vi) $\frac{\sin x}{2e^x - 1}$.

11. Calcola la formula di Taylor centrata in x_0 fino al terzo ordine di:

- i) $(x - 1)^2(x - 2)$ per $x_0 = 1$ ii) $\frac{x^2 - x^3}{1 + x^2}$ per $x_0 = 1$
 iii) $\sin(x)$ per $x_0 = \frac{\pi}{4}$; iv) $\log(\sin x)$ per $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
 v) $\sqrt{1 + x^2 + x^3 + x^4}$ per $x_0 = 1$; vi) $\arccos(\frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2})$ per $x_0 = 1$;
 vii) $\arctan\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$ per $x_0 = 1$; viii) $x|\log x|^{\frac{1}{2}}$ per $x_0 = 2$.

12. Se per $f(x)$ la formula di MacLaurin (al secondo ordine) è $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, qual è la formula di Taylor centrata in 1 di $f^{-1}(x)$ fino al secondo ordine?

13. Calcolare i seguenti limiti, se esistono, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll}
 i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{\log(1 + \tan^2 x)}; & ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x)^x - 1 + kx^2}{1 - \cos x}; \\
 iii) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \log(\sin x) - \cos x}{\sqrt[3]{\cos x}}; & iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x} - 1 + \frac{x}{2}}{\arccos x - \frac{\pi}{2} + x}; \\
 v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \log(2 + x) - k \log(1 + x^2)}{x^2}; & vi) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos x}{1 - \cos x} - \frac{k}{x^2} \right); \\
 vii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos(kx) + \frac{x^2}{2}}{\sin \sqrt{x} + x^4}; & viii) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(1 + \sin^2(1 - x)) + k(x - 1)^2}{(1 - x)^3}
 \end{array}$$

14. Calcolare un polinomio $P(x)$ di grado ≤ 3 tale che $e^{\sin^3 x + x} - P(x)$ sia infinitesimo di ordine maggiore di 3 per $x \rightarrow 0$. Che forma hanno i polinomi $Q(x)$ di grado esattamente 4 tali che $e^{\sin^3 x + x} - Q(x)$ sia infinitesimo di ordine 4 per $x \rightarrow 0$?

15. Calcolare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2 tale che $\cos(x) - x \sin x - P(x)$ sia infinitesimo di ordine maggiore di 3. Spiegare perché è sufficiente prendere un polinomio di grado 2.

16. Dire se esiste un intorno bucato di 0 tale che il segno di $\log(1 + e^x - \cos(x))$ è costante. E per $\log(1 + e^x - \cos(x)) - x$?

17. Scrivere la formula di MacLaurin di ordine N di $\frac{(x+1)^2}{1-x}$.

18. Usando la formula di Taylor con resto di Lagrange, mostrare che $f(x) := \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} < 0$ per $|x| < \frac{\pi}{2}$.

19. Calcolare $e^{\frac{1}{3}} \cos(\frac{1}{3})$ a meno di 10^{-2} .

20. Trovare un numero razionale che approssimi $e^{\cos(\frac{1}{7})}$ con un errore minore di 10^{-4} .

21. Trovare un polinomio che approssimi xe^x con un errore minore di 10^{-2} su $[-1, 1]$.

22. Trovare un polinomio che approssimi $\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}$ su $(0, \frac{1}{2})$ a meno di 10^{-3} .

23. Trovare un polinomio che approssimi x^x con errore minore di 10^{-3} su $x \in (0.8, 1.1)$

24. (a) Per ogni $N \in \mathbb{N}$ scrivere la formula di Taylor centrata in 0 di ordine N per la funzione $f(x) = 2^{3x}$ con resto sia di Peano che di Lagrange. (b) Calcolare $f(-1/3)$ con errore minore di 10^{-4} . (c) Scrivere un polinomio che approssimi $\frac{2^{3x}-1}{x}$ su $[-1/3, 0)$ con un errore minore di 10^{-3} .

- 25.** Per quali $k \in \mathbb{N}$ $\cos(kx)$ è approssimato su $[-\frac{1}{3\sqrt{k}}, \frac{1}{3\sqrt{k}}]$ da $1 - \frac{k^2}{2}x^2$ con errore minore di 10^{-2} ?
- 26.** Mostrare che $\cos(\frac{1}{n})$ è irrazionale per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- 27.** La costante di Ramanujan $e^{\pi\sqrt{163}}$ dista dall'intero più vicino meno di 10^{-12} . A quale ordine dovremmo troncare la formula di Taylor per e^x , centrata in 0 e con resto di Lagrange, per ottenere una stima per l'errore minore di 10^{-12} quando la si calcola in $x = \pi\sqrt{163}$?