ANALISI MATEMATICA I
A.A. 2015-16 – Foglio 7

Esercizi

1. Disegnare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni, indicando dominio, limiti agli estremi del dominio, intervalli di monotonia, estremi relativi e assoluti e intervalli di convessità.

$$a)\ f(x) = x^2 \log|x|; \qquad b)\ g(x) = 2x + \arctan\frac{x}{x^2-1}.$$

2. Sia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) - (x-3)\cos(\sqrt{x})$. Dire se esiste un intervallo di lunghezza maggiore di 10^{100} dove f è convessa.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostrare che se $|f|$ è convessa su $\mathbb{R}$ e $f(a) = f(b) = 0$ con $a < b$ allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

4. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\log(1-a^2x) & x \in (-\infty,0) \\ 1 + b\cos(x) - \sin x & x \in [0,+\infty). \end{cases}$$

Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile? Esistono valori di a, b tali che $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$? Per quali valori di a, b la funzione f ammette una primitiva? Per quali una primitiva generalizzata?

5. Dire se le seguenti funzioni ammettono primitive/primitive generalizzate e calcolarle.

$$i)\ f(x) = \begin{cases} 6(x-x^2) & x \in (-\infty,0] \\ e^x & x \in (0,+\infty) \end{cases} \qquad ii)\ f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x/4) & x \in (-\infty,2] \\ 2e^{x-2} - 4x^{-2} & x \in (2,+\infty) \end{cases}$$

$$iii)\ f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{-1} & x \in (-\infty,0) \\ (x\sin(x)+1)\cos(x) & x \in [0,+\infty) \end{cases} \qquad iv)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{(x+2)^3} & x \in (-\infty,-3] \\ 2\log(4+x) & x \in (-3,-1) \\ \frac{x+3}{(x+2)^3} & x \in (-1,+\infty] \end{cases}$$

6. Trovare una primitiva/primitiva generalizzata di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sec(x)}\tan(x)\sec(x)}{(e^{\sec(x)}+1)^2} & x \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}, \\ 0 & x \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Sia F la primitiva tale che $F(0) = 0$, mostrare che $F(\pi) = \frac{2}{1+e}$.

7. Con riferimento all'esercizio precedente trovare (se esistono) tutte le primitive/primitive generalizzate F di f che soddisfano le seguenti condizioni:

i)	*a)* $F(-2) = 0$,	*b)* $F(-1)^2 + F(1) = 1$,	*c)* $\log(F(x)) = x \ \forall x > 0$
ii)	*a)* $F(2) = 2$,	*b)* $F(-1) = 2F(3)$,	*c)* $F'(0) = 1$
iii)	*a)* $F(-1) = F(\pi)$,	*b)* $\pi < F(x) < 2\pi \ \forall x < 0$	*c)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{4}\cos(2x) + F(x)\right) = 0$
iv)	*a)* $F(-2) = 4\log 2$,	*b)* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$	*c)* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 2 \lim_{x\to+\infty} F(x)$

Per chi vuole divertirsi con le funzioni convesse

8. Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ una funzione a valori positivi che è decrescente per $x \geq 0$ e crescente per $x \leq 0$. Mostrare che se f è concava su $\mathbb{R}$ allora $x \mapsto \frac{x}{f(x)}$ è concava in $(-\infty, 0]$ e convessa in $[0, \infty)$.

9. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni convesse e sia h una funzione continua tale che $f(x) < h(x) < g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dire se è possibile che h sia concava in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

10. La funzione Γ è una funzione differenziabile infinte volte che soddisfa $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $\forall x \in (0, \infty)$ e $\Gamma(1) = 1$ (e quindi $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Inoltre, Γ è crescente per $x \geq 2$ e convessa per $x \in [2, 3)$. Mostrare che Γ è convessa su $[2, +\infty)$.

11. Siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ funzioni strettamente convesse a valori positivi. Mostrare che se $f \cdot g$ è concava allora una tra $\frac{f}{g}$ e $\frac{g}{f}$ è strettamente crescente.

12. Sia $P(x)$ un polinomio monico (cioè il termine di grado maggiore ha coefficiente 1) di grado pari. Mostrare che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $x \mapsto P(x) + ax^2$ è convessa su $\mathbb{R}$.

13. Siano $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con f convessa e g concava. Mostrare che se $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per chi ha bisogno di impratichirsi sulle regole di integrazione

14. Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni (dove?):

i) $\tan x$;

ii) $\dfrac{x}{\sqrt{2-3x}}$;

iii) $x^2 e^x$;

iv) $(\sin x)^2$;

v) $\sqrt{e^x-1}$;

vi) $\dfrac{1}{x\sqrt{2x-1}}$;

vii) $\dfrac{1}{a^2-x^2}$;

viii) $\dfrac{x^3+2}{x^2+2}$;

ix) $\dfrac{(\sin x)^2-(\cos x)^2}{(\sin x)^2(\cos x)^2}$;

x) $\dfrac{1}{1+\sin x}$;

xi) $\dfrac{x}{1-x^4}$;

xii) $\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$;

xiii) $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$;

xiv) $\dfrac{x^2}{x^3-1}$;

xv) $x(x^2+1)^k$;

xvi) $e^{x^2}x$;

xvii) $x^2\cos x$;

xviii) $\log x$;

xix) $\sin x e^{-x}$;

xx) $x^3\sqrt{x^2+1}$;

xxi) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

xxii) $\dfrac{1}{1+(\cos x)^2}$;

xxiii) $\dfrac{1}{\sin x}$;

xxiv) $(\sin x\cos x)^2$;

xxv) $\dfrac{2x}{(x+1)(x-2)(x+1)}$;

xxvi) $(3x+1)^{1/2}$;

xxvii) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

xxviii) $x\Big(x+\dfrac{1}{4}\Big)^{1/2}$;

xxix) $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

xxx) $\sqrt{1-x^2}$;

xxxi) $\sin x\cos x$;

xxxii) $\dfrac{x}{a^x}$;

xxxiii) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$;

xxxiv) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

xxxv) $\dfrac{1}{(\sin x)^2(\cos x)^2}$;

xxxvi) $\dfrac{1}{x^3-1}$;

xxxvii) $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$;

xxxviii) $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}+e^x+1}$;

xxxix) $\dfrac{\sin(\log x)}{x}$;

xl) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}$;

xli) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$;

xlii) $\dfrac{1}{(1+e^x)^{1/2}}$;