

**ANALISI MATEMATICA I**  
**A.A. 2015-16 – Foglio 8**

ESERCIZI

1. Determinare per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  converge l'integrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x + x^2 - \sin x)^\alpha}.$$

2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{\alpha}{x-1} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}} & 1 < x \leq 4, x \neq \sqrt{2} \\ 0 & x = \sqrt{2}; \end{cases}$$

calcolare, per i valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui esiste,  $\int_0^4 f(x) dx$ .

3. Data una funzione  $f$  continua su  $\mathbb{R}$  e tale che  $f(0) + 1 = f(1)$ , calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+1} f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt}{x}.$$

4. Sia

$$f(x) = \cos^2(\pi x) + x \log(1 + x^2).$$

Utilizzare il teorema della media integrale per mostrare che esiste  $c \in [-1, 1]$  tale che  $f(c) = \frac{1}{2}$ .

5. Determinare dove è definita la funzione

$$F(x) = \int_2^x \frac{(t-1)e^{-t}}{\ln|t|} dt$$

e stabilire se il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  esiste finito.

6. Calcolare la parte principale di

$$f(x) = e^{\int_0^x t^3 2^{t^3} dt} - 1; \quad g(x) = \int_0^{x^2} \frac{\log(1 + \sin^2 t)}{1 - 2t^2 + 3t^4} dt$$

per  $x \rightarrow 0$ .

7. Siano

$$f(t) = \begin{cases} \log(1 + t^2) & t \geq 0, \\ \frac{1}{t^2} e^{1/t} & t < 0, \end{cases} \quad g(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

- a) Determinare il dominio di  $g$  e stabilire se  $g$  è una primitiva di  $f$  in  $\mathbb{R}$ ;  
b) tracciare i grafici di  $f$  e  $g$  (non si richiede  $f''$ ).

8. Sia

$$F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^x \frac{e^{1/t}}{\log|t|} dt.$$

- a) Determinare il dominio di  $F$ .

b) Dire quante soluzioni reali ha l'equazione  $F(x) = 0$ .

9. Siano

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|t-2|}} & t < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|t+2|}} & t > 0. \end{cases}$$

Si traccino i grafici qualitativi di  $f$  e  $F$ , che tengano conto di dominio, eventuali asintoti, derivabilità, intervalli di monotonia e convessità.

10. Siano

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} \sqrt[3]{t} & t < 0 \\ \sqrt{|\sin t|} + \frac{1}{2t \log t} & t > 0, t \neq 1, t \neq \pi \\ 0 & t = 1, t = \pi \end{cases} \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

- a) Determinare il dominio di  $F$  nei casi  $a = -1$  e  $a = 2$ ;  
 b) dire se  $F(x) = \int_2^x f(t) dt$  è una primitiva di  $f$  su  $(1, +\infty)$ ;  
 c) disegnare il grafico di  $F$  nel caso  $a = -1$ .

11. Studiare le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \left(1 - \cos \frac{1}{t}\right) dt; & F(x) &= \int_0^x \frac{t+1}{\sin t} dt; & F(x) &= \int_0^x \frac{t+1}{\sqrt{\sin t}} dt; \\ F(x) &= \int_1^x \frac{e^t \log(1+e^{-t^2})}{\sqrt{1+t}} dt; & F(x) &= \int_2^x \frac{t+1}{\sqrt[3]{1-t^2}} dt; & F(x) &= \int_1^x \frac{\log t}{\sqrt{t}(t-2)} dt; \\ F(x) &= \int_1^{x^2} \frac{1+\sin t}{\sqrt{t-1}} dt; & F(x) &= \int_0^{2 \cos x} \frac{1}{4-t^2} dt; & F(x) &= \int_1^{\log x} \frac{\sin t}{\sqrt{t^3}} dt. \end{aligned}$$

12. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in  $x_0$  di:

$$g(x) = (x-1) \int_x^1 (t-1) \log t dt, \quad x_0 = 1; \quad g(x) = \int_0^{\log(1-x)} \frac{t \cos t}{e^t} dt, \quad x_0 = 0.$$

13. Calcolare l'area della parte del semipiano  $x \geq 0$  compresa tra l'asse delle ascisse e la curva  $\{e^{-x} + 1/(x^2 + x + 1) \mid x \geq 0\}$ .

#### PER CHI VUOLE DIVERTIRSI CON LE FUNZIONI INTEGRALI

14. Determinare dominio e limiti agli estremi del dominio per

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\log(1+t)}{(t-4)^2} dt.$$

15. Dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ , dove:

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan(1/t)}{\log t} dt.$$

Si dimostri poi che per  $x \rightarrow +\infty$ :

$$F(x) \sim \frac{\log 2}{\log x}$$

e si concluda che non esiste l'ordine di infinitesimo di  $F(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

16. Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned}
 i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{e^x} \frac{1}{t^2 + t \log t + 1} dt; & \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2 + t \log t + 1} dt} - 1}{1/x}; \\
 iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-1}^{x+\cos x} \frac{\log(t) - \log(1+t)}{\sqrt{t}} dt; & \quad iv) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x t^t dt}{x-1}
 \end{aligned}$$

17. Calcolare la parte principale per  $x \rightarrow 0$  di

$$\begin{aligned}
 i) \int_0^x \frac{1}{t^2 + t \log t + 1} dt; & \quad ii) \int_x^{2x} \frac{1 + \sin t}{t^2} dt; & \quad iii) \int_x^{x+1} \frac{\log(1+t)}{t} dt; \\
 iv) \int_{x^2}^x \frac{1}{(t+3)^2(3t^2+1)^2} dt; & \quad v) \int_1^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{\sqrt{t-1}}{\arctan t} dt; & \quad vi) \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{t + e^{-1/t}} dt.
 \end{aligned}$$

18. Calcolare la parte principale per  $x \rightarrow +\infty$  di

$$\begin{aligned}
 i) \int_x^{2x} \frac{1 + \sin(1/t)}{t^2} dt; & \quad ii) (x+1) \int_{1/x}^{x^2} e^{-t^2} dt; & \quad iii) \int_x^{2x} \frac{\sin t + \cos t + 1}{t} dt; \\
 iv) \int_x^{x+\frac{1}{x}} \frac{te^t + \log t}{e^t + 1} dt; & \quad v) \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \arctan t} dt & \quad vi) \frac{1}{2 - \sin^2 x} \int_{x-1}^{x+\cos^2 x} \frac{\sqrt{t+2}}{t\sqrt{t+1}} dt;
 \end{aligned}$$

19. Sia  $f$  continua su  $\mathbb{R}$  tale che  $|f(0)| = 1$  e sia  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{F(x)} f(t) dt}{x}.$$

20. Calcolare la formula di MacLaurin di ordine 2 di

$$\begin{aligned}
 i) \int_0^x \sin(t^2 + t) dt; & \quad ii) \int_{-x}^x \min(1, 2 - |t|) dt; \\
 iii) \int_x^{2x} \frac{1}{t^2 + t \log(t^2 + 1) + 1} dt; & \quad iv) \int_0^{\sin x} \log(\cos(t)) dt.
 \end{aligned}$$

PER CHI HA BISOGNO DI IMPRATICHIRSI SUGLI INTEGRALI DEFINITI E IMPROPRI

21. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\begin{aligned}
 i) \int_{-1}^2 |2x^2 - 3| dx; & \quad v) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x dx; & \quad ix) \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx; \\
 ii) \int_{-1}^1 (x + |x|) dx; & \quad vi) \int_{-1}^1 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} dx; & \quad x) \int_1^2 \frac{1}{x^{1/2} - x^{1/4} + 1} dx; \\
 iii) \int_2^3 \frac{x+3}{e^x} dx; & \quad vii) \int_{-1}^3 (x^3 + x)e^{x^2} dx; & \quad xi) \int_1^{2\pi+1} (\sin(2x+2))^2 dx; \\
 iv) \int_{-1}^1 \frac{x^3}{2-x^2} dx; & \quad viii) \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+x}} dx; & \quad xii) \int_0^1 \frac{x^2}{(1+2x)^{1/3}} dx;
 \end{aligned}$$

**22.** Calcolare, se esistono, i seguenti integrali impropri:

$$\begin{array}{lll}
 i) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-3x+2} dx; & ii) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx; & iii) \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+20}} dx; \\
 iv) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x dx; & v) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx; & vi) \int_0^1 \frac{1}{(x-1)x} dx.
 \end{array}$$

**23.** Dire se i seguenti integrali impropri convergono, al variare del parametro se presente:

$$\begin{array}{lll}
 i) \int_{-\pi}^{+\infty} \frac{x}{e^x+1} dx; & ii) \int_0^{+\infty} (\sin x)^{-1} dx; & iii) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{3/2}+\sqrt{x}} dx; \\
 iv) \int_0^{1/2} \frac{\log 2x}{2x-1} dx; & v) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx; & vi) \int_0^1 \frac{1}{(x-\arctan x)^2} dx; \\
 vii) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{1/3}} dx; & viii) \int_0^1 \frac{x}{1-\cos x} dx; & ix) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x-x}} dx; \\
 x) \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^2}} \log x dx; & xi) \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{\log x} dx, a \in \mathbb{R}; & xii) \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^a dx, a > 0; \\
 xiii) \int_1^a \frac{1}{\sin x} dx, a \in \mathbb{R}; & xiv) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a-1} dx, a \in \mathbb{R}; & xv) \int_1^{+\infty} x^a \sin(x^b) dx, a, b > 0;
 \end{array}$$