

**ANALISI MATEMATICA I**  
**A.A. 2015-16 – Foglio 9**

ESERCIZI

1. Determinare se le serie seguenti sono convergenti al variare dei parametri se presenti.

$$\begin{array}{lll}
 i) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^{1+n} & ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n + 5^n} & iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n) + \sin(n^3)}{n^2 + \cos(2n)} \\
 iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}n)}{\log n} & v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2 \arctan n - 3)} & vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + n + \log^2 n)^2 - n^2} \\
 vii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{1 + n \log^3 n} & viii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2(-1)^n}{n} & ix) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}n) + \sin(\frac{\pi}{2}n)}{n} \\
 x) \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n+1) - \log(n))^2 & xi) \sum_{n=1}^{\infty} (\tan(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n})) & xii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + (n+1)! + (n+2)!}{(n/3)^n} \\
 xiii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n, x \in \mathbb{R} & xiv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R} & xv) \sum_{n=1}^{\infty} n^{an} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^n, a > 0 \\
 xvi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n/m)^n}, m \in \mathbb{Z}_+ & xvii) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{\sqrt{n^3}}, a > 0 & xviii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n^{-a})}{n}, a > 0 \\
 ixx) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a+3}{a^2+1}\right)^n, a \in \mathbb{R} & xx) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan n + a \arctan \left(\frac{1-n^3}{n^2}\right)\right), a \in \mathbb{R} \\
 xxi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{an}}{n^{1/a}}, a > 0 & xxii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2) - \log(n)}{n^a}, a > 0 \\
 xxiii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{bn}}{an^2 + bn + 1/2}, a, b \in \mathbb{Z} & xxiv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (n!)^{2a}}{(2n+1)!}, a > 0.
 \end{array}$$

2. Sia  $f$  una funzione continua su  $\mathbb{R}$ . Mostrare che  $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)^n$  converge se  $|f(0)| < 1$  e non converge se  $|f(0)| > 1$ . Determinare la convergenza nei casi  $f(x) = 1 - x$  e  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ .

3. Sia  $f$  in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Mostrare che  $\sum_{n=1}^{\infty} (f(1/n) - f(0))^2$  converge.

4. Sia  $a_n$  una successione di numeri reali. Mostrare che  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^4 + 2}{2a_n^2 + 1}$  diverge.

5. Calcolare  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ .

6. Sia  $f$  una funzione continua su  $\mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  e sia  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Mostrare che  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(F(n)^2 + 1)^a}$  converge per  $a > \frac{1}{2}$  e diverge per  $a \leq \frac{1}{2}$ .

7. Usando la formula di MacLaurin con resto di Lagrange per  $e^x$  mostrare che  $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ .

8. Determinare (se esiste)  $a \in \mathbb{R}$  tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a+4}{2-a}\right)^n.$$

#### ESERCIZI PER GLI AMANTI DELLE SERIE

9. Procedendo in modo simile all'esercizio 5 calcolare  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}$  per ogni  $k \geq 1$ .

10. Sia  $f(n) = \sqrt{n}$  se  $n$  pari e  $f(n) = \sqrt{n} + 1$  se  $n$  dispari. Mostrare che  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f(n)}$  diverge. Dedurre che il teorema dell'equivalenza asintotica<sup>1</sup> non vale per sequenze a segno non costante.

11. Mostrare che  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \sin(2n) = 0$ . (Suggerimento: scrivere  $\sin(2n) \sin(1)$  come differenza di due coseni).

12. a) Utilizzando il test dell'integrale mostrare che

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \sim \log m$$

per  $m \rightarrow \infty$ .

b) Mostrare che

$$\sum_{n=1}^m \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log m.$$

c) La costante di Eulero-Mascheroni  $\gamma$  è definita come

$$\gamma := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Mostrare che tale serie converge.

d) Mostrare che

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} = \log m + \gamma + o(1)$$

per  $m \rightarrow \infty$ .

---

<sup>1</sup>Se  $a_n, b_n \geq 0$  per  $n \geq k$  e  $a_n \sim \lambda n_n$  per  $n \rightarrow \infty$  con  $\lambda \neq 0$ , allora  $\sum_{n \geq k} a_n$  converge se e solo se  $\sum_{n \geq k} b_n$  converge.