ANALISI MATEMATICA I
A.A. 2015-16

Esercizi da svolgere con l'aiuto dei tutor martedì 22 marzo

1. Calcolare la formula di MacLaurin di ordine 4 con resto di Peano per

$$f(x) := \sqrt{1 + \log(1 + \sin(\cos(x) - 1)) - \sin(\cos(x) - 1)}$$

ed utilizzarla per calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1 - ax^4}{x^4 + x^5 + x^6 + \cdots + x^{2016}}.$$

2. Sia f una funzione derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$ e tale che

$$f''(x) = \sin(f(x)) \qquad f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1$$

Calcolare il poinomio T_3 di MacLaurin di ordine 3 di f. Sapendo che $|f'(x)| \leq 2$ per ogni $x \in (-1, 1)$, dare una stima dell'errore $|f(x) - T_3(x)|$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

3. a) Calcolare un polinomio che approssimi per $e^{x/4}$ per $|x| \leq 1$ con un errore minore di 10^{-2}.
b) Calcolare un'approssimazione di $\cos(1/5)$ con un errore minore di 10^{-2}.
c) Usare quanto ottenuto in a) e b) per calcolare un'approssimazione di $e^{\frac{1}{4}} \cos(1/5)$ e di $e^{\frac{1}{4}\cos(1/5)}$. Che stime si possono dare degli errori in tali approssimazioni?

4. Sia $n \geq 0$ intero e sia $f_n(x) = x \log^n(x)$ per $x > 0$. Determinare al variare di n dove $f_n(x)$ è concava e dove è convessa.

5*. Mostrare che il polinomio di Taylor centrato in $a \in \mathbb{R}$ di ordine $n \geq d$ di un polinomio di grado d coincide col polinomio stesso.

6*. a) Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Mostrare che se $f(x)$ è convessa allora anche $e^{f(x)}$ lo è. Mostrare che il viceversa è falso.
b) Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e sia $[a, b]$ contenuto nel dominio di $\log(f(x))$. Mostrare che se $f(x)$ è concava in $[a, b]$ allora anche $\log(f(x))$ lo è.