

Foglio di esercizi 1

1. Sia $f(1) = f(2) = 1$ e $f(n) = 0$ se $n \geq 3$; calcolare $f^{-1}(n)$.
2. Sia f completamente moltiplicativa, $f \neq e$; dimostrare che $f * f$ e f^{-1} non sono completamente moltiplicative.
3. Dimostrare le seguenti affermazioni o trovare controesempi:
 - a) se $(m, n) = 1$ allora $(\varphi(m), \varphi(n)) = 1$;
 - b) se n è composto allora $(n, \varphi(n)) > 1$;
 - c) se m e n hanno gli stessi divisori primi allora $m\varphi(n) = n\varphi(m)$.
4. Sia k un intero positivo; dimostrare che per $x \rightarrow \infty$ si ha, uniformemente in k ,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, k) = 1}} 1 = \frac{\phi(k)}{k}x + O(2^{\omega(k)}).$$

5. Un intero n si dice k -free se n non è divisibile per alcuna potenza k -esima; dimostrare che $\chi_k(n) = \sum_{d^k | n} \mu(d)$ è la funzione caratteristica dei numeri k -free.
6. (a) Mostrare che per $|x| < 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

- (b) Verificare che per $\Re(s) > 1$ si ha

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)^2}{n^s} = \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}.$$

7. Per $n \in \mathbb{Z}$, sia

$$c_\ell(n) := \sum_{\substack{a=1 \\ (a, \ell)=1}}^{\ell} e^{2\pi i \frac{na}{\ell}}.$$

- (a) Mostrare che $c_\ell(n)$ è moltiplicativa in ℓ (cioè $c_{\ell_1 \ell_2}(n) = c_{\ell_1}(n)c_{\ell_2}(n)$ per $(\ell_1, \ell_2) = 1$).
- (b) Calcolare $c_{p^r}(n)$ per ogni primo p e ogni $r \geq 1$, confrontando il risultato ottenuto con la funzione $c_\ell^*(n) = \mu\left(\frac{\ell}{(n, \ell)}\right)\varphi\left(\frac{\ell}{(n, \ell)}\right)^{-1}$.

(c) Dedurre una formula per $c_\ell(n)$.

8. Dimostrare per sommazione parziale le formule asintotiche

(a)
$$\sum_{n \leq x} \log^2 n = x \log^2 x - 2x \log x + 2x + O(\log^2 x);$$

(b)
$$\sum_{n \leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} \log^2 x + c_1 + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$
 per una costante c_1 ;

(c)
$$\sum_{n \leq x} \frac{\cos \sqrt{n}}{n} = c_2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$
 per una costante c_2 .

9. Dimostrare che $n/\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)^2/\varphi(d)$, che $\varphi(n) \gg n/\log n$ e che

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \log x + O(1).$$

10. Sia $\sum_{d=1}^{\infty} |g(d)|/d$ convergente; dimostrare che

(a) $\sum_{d \leq x} |g(d)| = o(x)$;

(b) se $\sum_{n \leq x} f(n) = cx + o(x)$ e $h = g * f$ allora

$$\sum_{n \leq x} h(n) = cgx + o(x)$$

dove $g = \sum_{d=1}^{\infty} g(d)/d$.

11. Sia $\tau_k(n)$ il numero di rappresentazione di n come prodotto di k cifre (contando l'ordine):

$$\tau_k(n) := \sum_{n_1 \cdots n_k = n} 1.$$

(a) Mostrare che $\tau_k(n) = \sum_{d|n} \tau_{k-1}(d)$.

(b) Mostrare che per ogni intero $k \geq 2$ si ha

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n) = xP_k(\log x) + O_k(x^{1-\frac{1}{k}}(\log x)^{k-2}).$$

dove P_k è un polinomio di grado $k-1$ e primo coefficiente $\frac{1}{(k-1)!}$ (laborioso).