Foglio di esercizi 2

1. Dimostrare l'identità $\Lambda - \mathbb{1} = (\log - \tau + 2\gamma\mathbb{1}) * \mu - 2\gamma e$ (con $e(1) = 1$ e $e(n) = 0$ se $n > 1$). Dedurre, usando il metodo dell'iperbole che $M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$ implica $\psi(x) \sim x$.

2. Sia d_n il minimo comune multiplo dei primi n numeri. Dimostrare che $d_n = e^{\psi(n)}$

3. Calcolare la varianza di $w(n)$.

4. Mostrare che $\Omega(n) = (1 + o(1)) \log \log n$ per tutti gli interi $n \leq x$ con al più $o(x)$ eccezioni.

5. Mostrare che $\pi(x) \sim x/\log x$ implica che per ogni $\varepsilon > 0$ $e^{(1-\varepsilon)x} \ll_\varepsilon \prod_{p \leq x} p \ll_\varepsilon e^{(1+\varepsilon)x}$.

6. Sia $f(x)$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto in $\mathbb{R}$. Mostrare che $\tilde{f}$, la trasformata di Mellin di f, è meromorfa su $\Re(s) > -1$ con al più un polo semplice in $s = 0$ di residuo $f(0)$. Procedere poi allo stesso modo per mostrare che $\tilde{f}$ è meromorfa su $\mathbb{C}$ con eventuali poli (semplici) contenuti in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

7. Stabilire per quali $s \in \mathbb{C}$ è (inizialmente) definita la trasformata di Mellin di $f(x) = x^2 e^{-x}$ e calcolarla. Scrivere poi f in termini di $\tilde{f}$.