Foglio di esercizi 3

1. Partendo dalla formula $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{y\}y^{-s-1}\,dy$ mostrare che $\zeta(s)$ ammette prolungamento analitico su $\Re(s) > -1$, $s \neq 1$ e che $\zeta(0) = -1/2$.

2. Mostrare che $\int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2\,dt \sim \zeta(2\sigma)T$ for $\sigma > 1$. Mostrare che la stessa stima asintotica vale per $\sigma > \frac{1}{2}$ (piú difficile).

3. Usando un approccio simile a quello di Riemann e l'esercizio precedente mostrare che
$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$
per ogni $\varepsilon > 0$.

4. Sia $F(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ assolutamente convergente per $\sigma > 1$ e tale che
   - $|a_n| \leq \log(1+n)^3$ per $n \geq 1$;
   - $F(s) = \frac{\pi}{s-s_0} + h(s)$ con $s_0 = 1 + 2i$ e $h(s)$ intera;
   - La funzione di Lindelöf relativa a F soddisfi $\mu(\sigma) = 0$ per $\sigma > \frac{1}{2}$ e $\mu(\sigma) \leq \delta(\frac{1}{2} - \sigma)$ per $\sigma < \frac{1}{2}$ e qualche $\delta > 0$

   Ottenere una formula asintotica per $\sum_{n\leq x} a_n$ con resto $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ se $\delta \geq 2$ e $O(x^\varepsilon + x^{1-\frac{1}{\delta}+\varepsilon})$ se $\delta < 2$ (iniziare con i casi $\delta = 3, \delta = 0$ e $\delta = 3/2$).

5. Sia $S(x) := |\{n \mid \varphi(n) \leq x\}|$. Mostrare che $S(x) \sim \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x$ procedendo come segue.
   (a) Sia $f(k) = |\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = k\}|$ e sia $F(s) := \sum_{k\geq 1} \frac{f(k)}{k^s}$. Mostrare che $F(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\varphi(n)^s}$ e che si ha $F(s) \ll (\sigma - 1)^{-1}$ per $\sigma \to 1^+$ usando l'esercizio 9 del primo foglio (o dimostrandolo da zero usando lo stesso metodo).
   (b) Mostrare che per $\Re(s) > 1$ si ha $F(s) = \zeta(s)G(s)$ dove
   $$G(s) = \prod_p (1 - p^{-s} + (p-1)^{-s}).$$
   Spiegare perché $G(s)$ non è un prodotto di Eulero nel senso usuale.
   (c) Mostrare che $|-p^{-s} + (p-1)^{-s}| \leq |s|(p-1)^{-1-\sigma}$ e dedurne che $G(s)$ è olomorfa su $\Re(s) > 0$. Inoltre, mostrare che per $\sigma \geq \frac{1}{2}$ si ha $G(s) = O(e^{C|s|^{1-\sigma}/\log(2+|s|)})$ per qualche $C > 0$ e uniformemente in σ.
   (d) Mostrare che $G(1) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$.
   (e) Dopo aver osservato che $S(x) = \sum_{k\leq x} f(k)$ calcolare l'asintotica di $S(x)$ usando il metodo di Riemann.